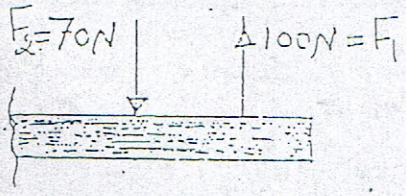
- Equilibrium in (2-D) Systems -

- الاتزان في الانظمة الثنائية الابعاد -

في البداية يجب التعرف على انواع القوى الخارجية المؤثرة على جسم ثنائي الابعاد (2-D) تتمثل :-

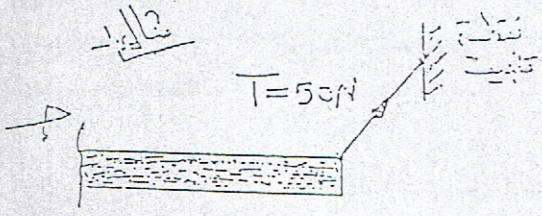
مثال :



1- القوى الاعتيادية (Force)

(داخلة او خارجة من الجسم)

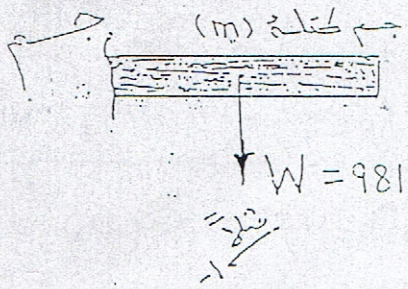
مثال :



2- قوى الشد (Tension)

قوة الشد دائماً تكون الى خارج الجسم باتجاه نقطة التثبيت (الشد).

مثال :



3- قوة الوزن (Weight)

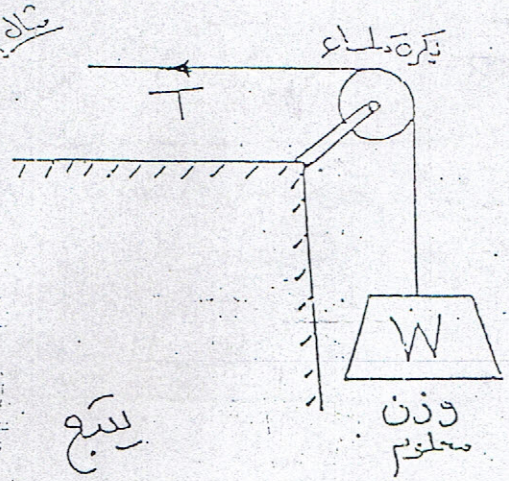
$$[\ W = m \times g\ ]$$

m :- الكتلة (kg)

g :- التعجيل الارضي ($9.81\ m/s^2$)

* للاجسام المتخلخلة تكون قوة الوزن في وسط الجسم والى الاسفل.
* اذا لم يذكر شيء في السؤال عن الكتلة أو الوزن فان الوزن مجهول.

مثال :



4- البكرات الملساء (Pullyes)

قوة الشد على جانبي البكرة الملساء تكون متساوية.

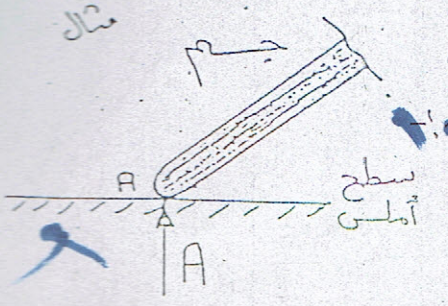
$$[\ T = W\ ]$$

5- قوى ردود الافعال (Reactions)

وهي قوى ردود الافعال الناتجة من اتصال الجسم بالسطح الخارجية. وهي على انواع عديدة اهمها :-

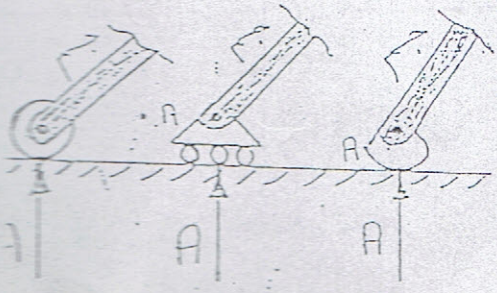
أ- السطح الاملس (Smooth surface)

مثال



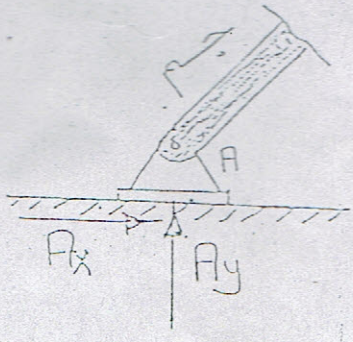
رد الفعل :- يكون قوة واحدة فقط عموديه على السطح (خارجة من السطح).

ب- سند متدحرج (Roller-support)



رد الفعل :- يكون قوة واحدة فقط عموديه على السطح (خارجة من السطح).

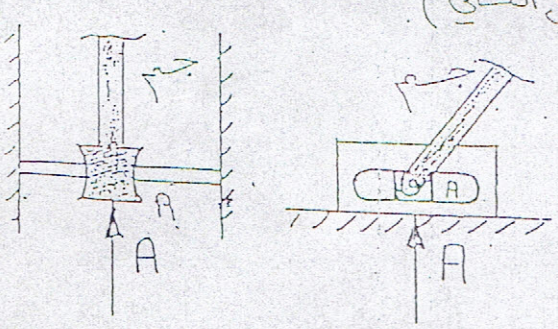
ج- مسمار موصل (Pin-connection)
(مفصل) (Hinge)



رد الفعل :- يكون قوتان ، الاولى عموديه على السطح والثانية موازية للسطح.
(اتجاهات القوتان تعرف من خلال حل السؤال)

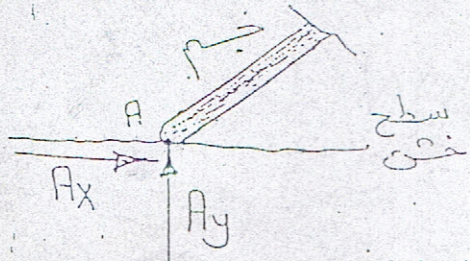
$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ (رد الفعل الكلي)

د- دليل متزلق (سطح متحرك)
(Freely Sliding guide)



رد الفعل :- قوة واحدة فقط عموديه على السطح (خارجة من السطح).

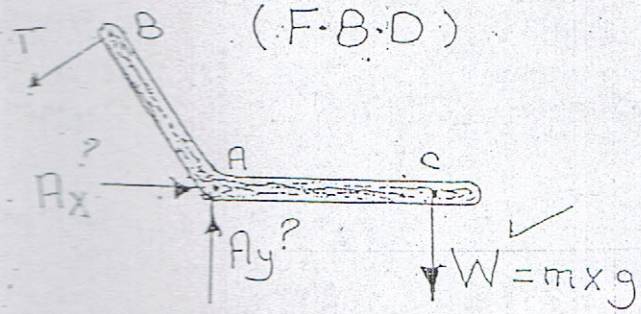
هـ- السطح الخشن (Rough Surface)



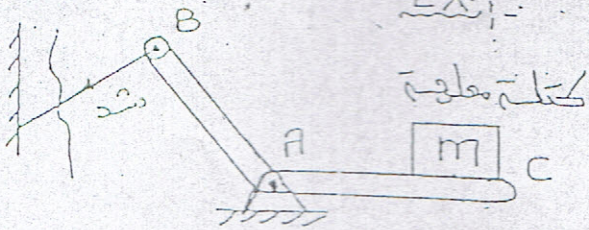
رد الفعل :- قوتان ، الاولى عموديه على السطح

امثلة توضيحية في كيفية رسم مخطط الجسم الحر (F.B.D) ووضع ردود الافعال :-

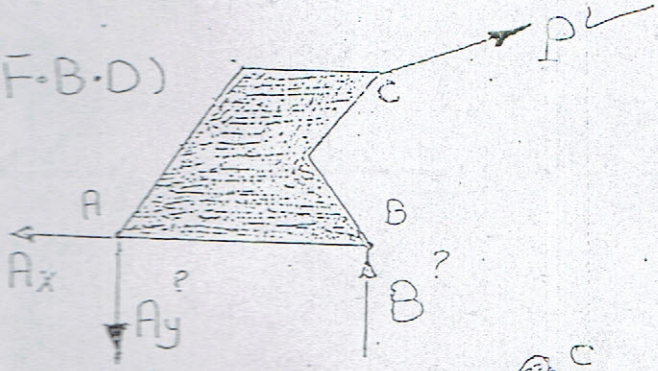
(F.B.D)



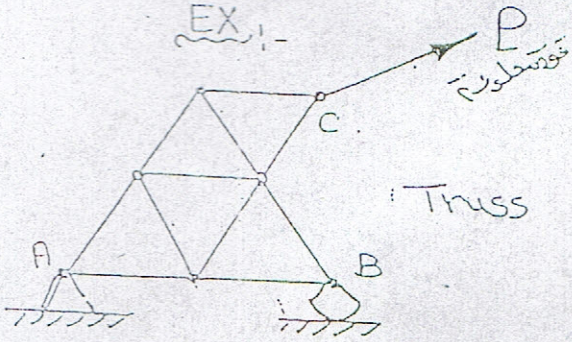
EX :-



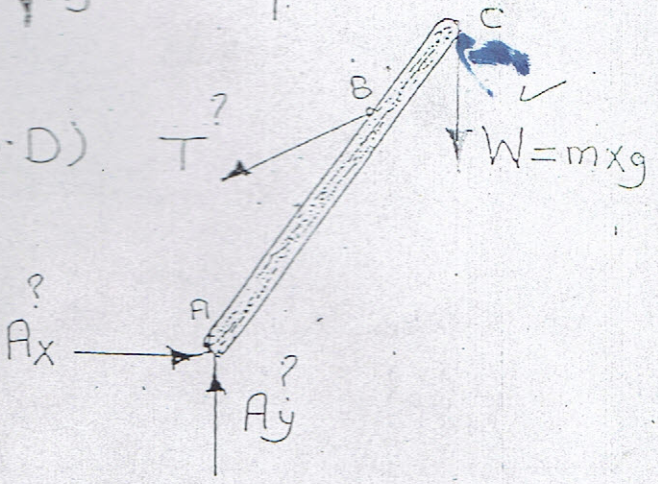
(F.B.D)



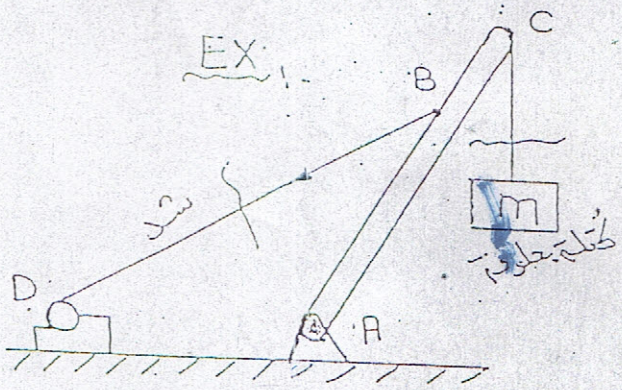
EX :-



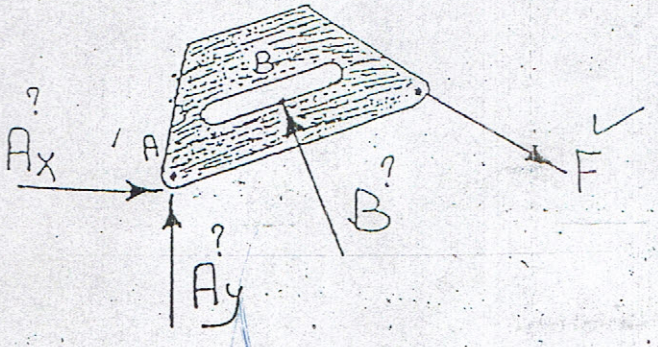
(F.B.D)



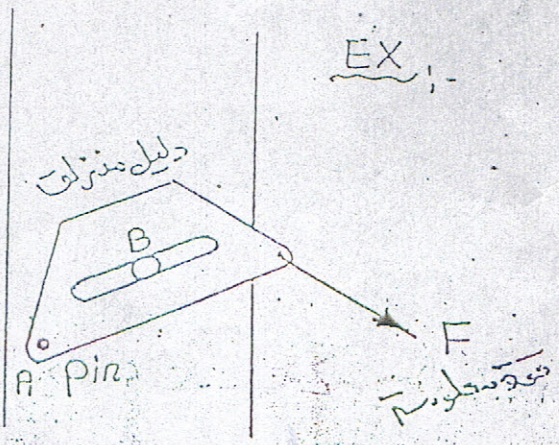
EX :-



(F.B.D)



EX :-



شروط الاتزان في الأنظمة الثنائية الابعاد (2-D)

1- $\Sigma F_x = 0$ (مجموع القوى الافقية يساوي صفر)

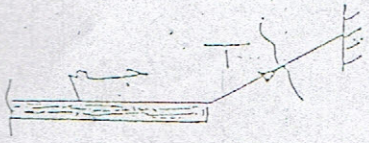
2- $\Sigma F_y = 0$ (مجموع القوى العمودية يساوي صفر)

3- $\Sigma M_{point} = 0$ (مجموع العزوم حول اي نقطة داخل او خارج الجسم يساوي صفر)

ملاحظة ١- لا يشترط التسلسل في تطبيق المعادلات اعلاه أثناء الحل دائما حسب ظروف السؤال.

ملاحظة ٢- دائماً نأخذ العزوم في البداية حول النقطة التي تلغي اكبر عدد ممكن من المجاهيل (نقطة pin عادة)

ملاحظة ٣- دائماً يتم عمل قطع في الشد.



ملاحظة ٤- بالنسبة للمفصل (pin)، عند وضع اتجاهات ردود الافعال فاننا نتم افتراض اتجاهات معينة وفي السؤال فاذا كانت النتيجة موجبة فالفرضية صحيحة، اما اذا كانت سالبة فيعكس الاتجاه.

خطوات حل مسائل الاتزان في الأنظمة «2-D»

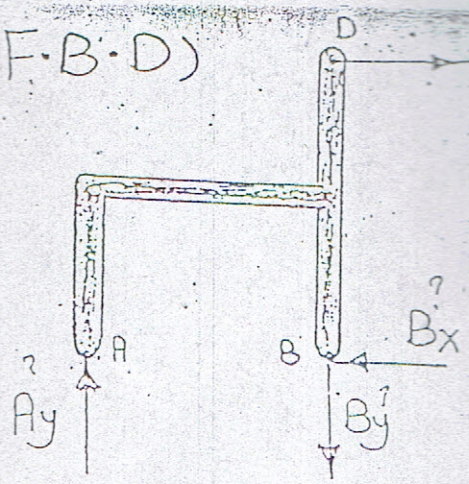
١- عزل الجسم عن محيطه الخارجي ورسم ما يشمل (F.B.D) (مخطط الجسم الحر) (Free Body Diagram).

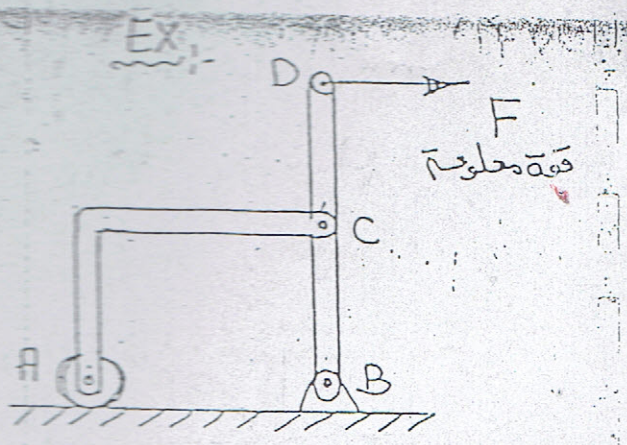
٢- وضع كافة القوى المؤثرة على الجسم.

٣- تحليل القوى المائلة.

٤- تطبيق شروط الاتزان ($\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ ، $\Sigma M_p = 0$)

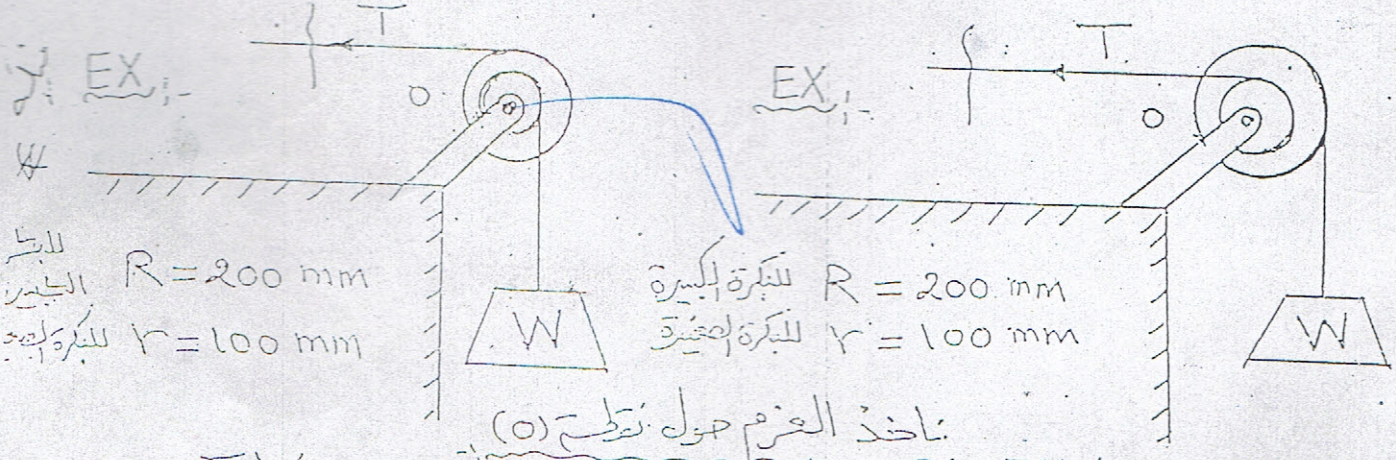
(F.B.D)





ملاحظة :- نقطة (C) تُعتبر مفصل داخلي وليس خارجي وعليه تُعتبر القوة في (C) قوة داخلية وليس قوة خارجية وسيتم دراستها في موضوع ال (Frames) الهياكل القادم ..

ملاحظة :- هناك بعض الحالات للبكرات، وهي ان تثبت بكرة صغيرة داخل بكرة كبيرة كما في المثالين التاليين :-



ناخذ العزم حول النقطة (O) :-

$\Sigma M_o = 0$

$T \times 200 - W \times 100 = 0$

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} W}$

$\Sigma M_o = 0$

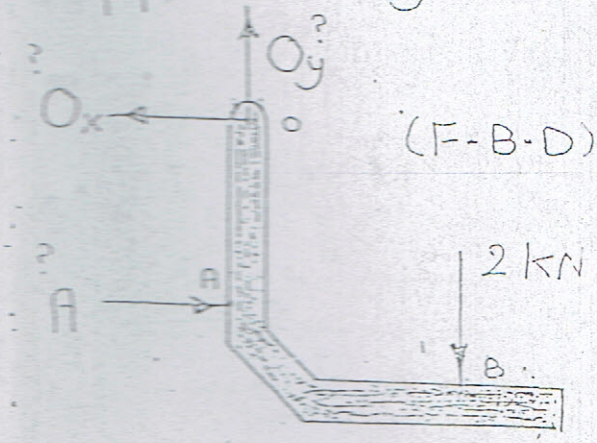
$T \times 100 - W \times 200 = 0$

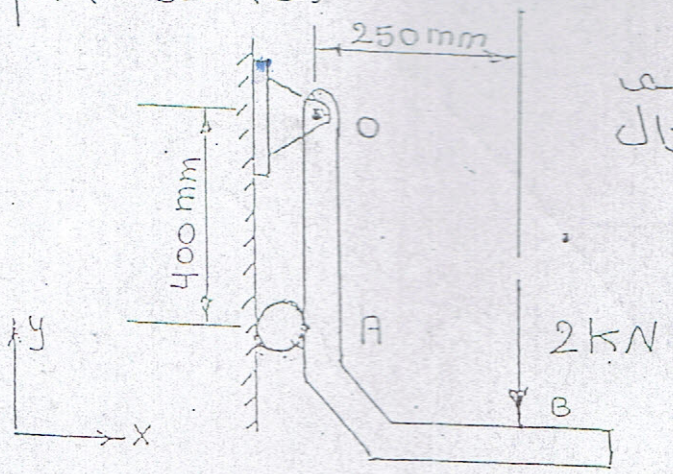
$\Rightarrow \boxed{T = 2W}$

هاتان الحالتان ستأتيان لاحقاً في موضوع الهياكل (Frames) القادم

ملاحظة :- موضوع الاتزان في الانظمة (2-D) مهم لانه سيدخل في حل مسائل (Trusses) ، (Frames) ، (Friction) القادمة حيث ان الاجسام في هذه المواضيع هي أجسام (2-D) متنوعة

EX (1) In the figure shown, determine the force on the roller (A) and the total force supported by the pin at (O).





Solution:-

① $\sum M_o = 0$ (+)

$+A \times 0.4 - 2 \times 0.25 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{A = 1.25 kN}$

② $\sum F_x = 0$

$A - O_x = 0 \Rightarrow 1.25 - O_x = 0 \Rightarrow$ $\boxed{O_x = 1.25 kN}$

③ $\sum F_y = 0$

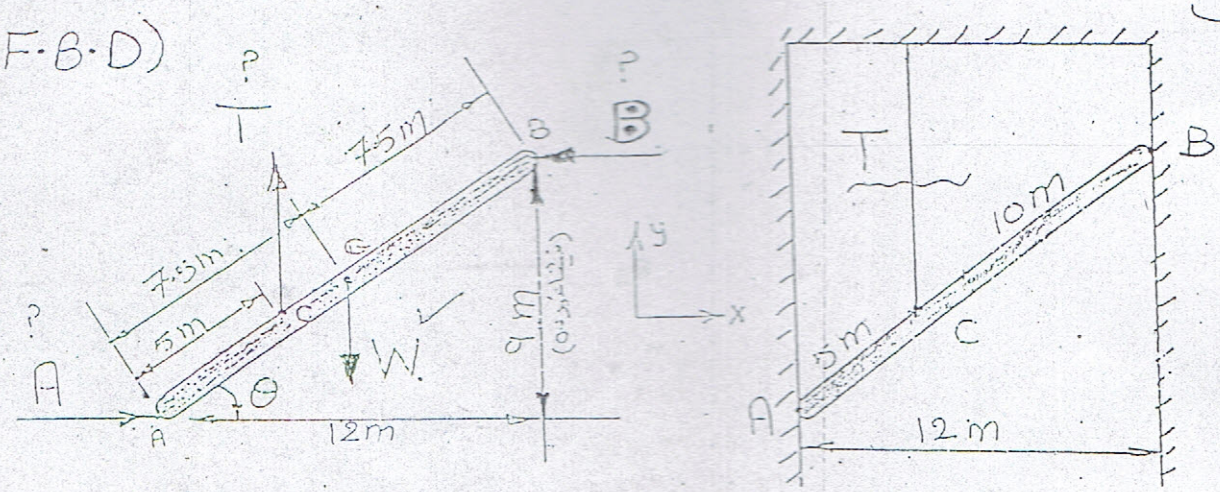
$O_y - 2 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{O_y = 2 kN}$

$\therefore O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2} = \sqrt{1.25^2 + 2^2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{O = 2.358 kN}$

EX ②:- The uniform (15 m) pole has a mass of (150 kg) and is supported by it's smooth end against the vertical cable. Calculate the reaction at (A) and (B) and the tension (T).

F.B.D)



Solution:-

$W = m \times g = 150 \times 9.81 \Rightarrow \boxed{W = 1471.5\ N}$

① $\sum F_y = 0$

$T - W = 0 \Rightarrow T - 1471.5 = 0 \Rightarrow \boxed{T = 1471.5\ N}$

② $\sum M_A = 0$ (+)

$+B \times 9 + T \times 5\cos\theta - W \times 7.5\cos\theta = 0 \Rightarrow$

$B \times 9 + 1471.5 \times 5 \times \frac{12}{15} - 1471.5 \times 7.5 \times \frac{12}{15} = 0$

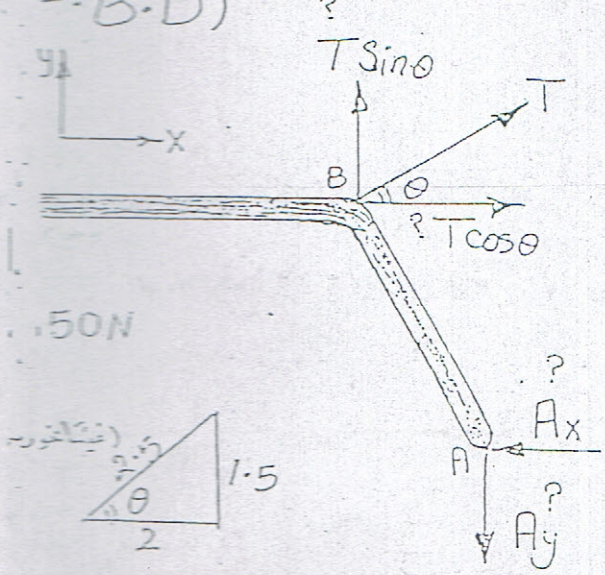
$\Rightarrow \boxed{B = 2943\ N}$

③ $\sum F_x = 0$

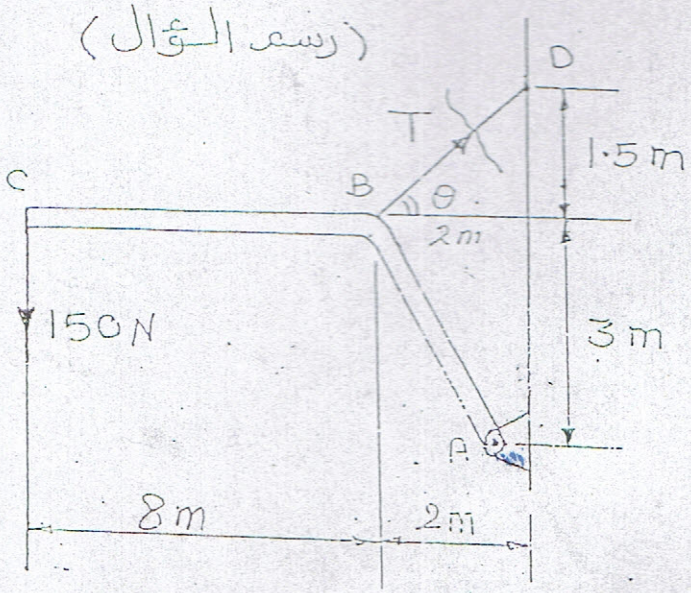
$A - B = 0 \Rightarrow A - 2943 = 0 \Rightarrow \boxed{A = 2943\ N}$

EX ③ :- A force of (150N) acts on the end of the beam shown in figure. Determine the reaction at the pin(A) and the tension in the cable.

F.B.D)



(رسم السؤال)



$\theta = \tan^{-1}\frac{1.5}{2}$

Solution:-

$\Sigma M_A = 0 \cdot \circlearrowleft +$

$50 \times 10 - T\cos\theta \times 3 - T\sin\theta \times 2 = 0$

$\left(\frac{2}{2.5}\right)$ $\left(\frac{1.5}{2.5}\right)$

$\Rightarrow \boxed{T = 416.666\ N}$

$\Sigma F_x = 0$

$T\cos\theta - A_x = 0 \Rightarrow 416.666 \times \frac{2}{2.5} - A_x = 0$

$\Rightarrow \boxed{A_x = 333.33\ N}$

$\Sigma F_y = 0$

$T\sin\theta - A_y - 150 = 0 \Rightarrow 416.66 \times \frac{1.5}{2.5} - A_y - 150 = 0$

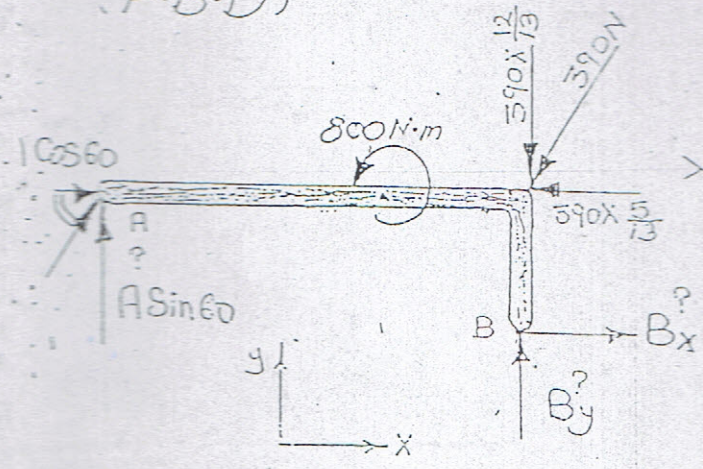
$\Rightarrow \boxed{A_y = 100N}$

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{333.33^2 + 100^2}$

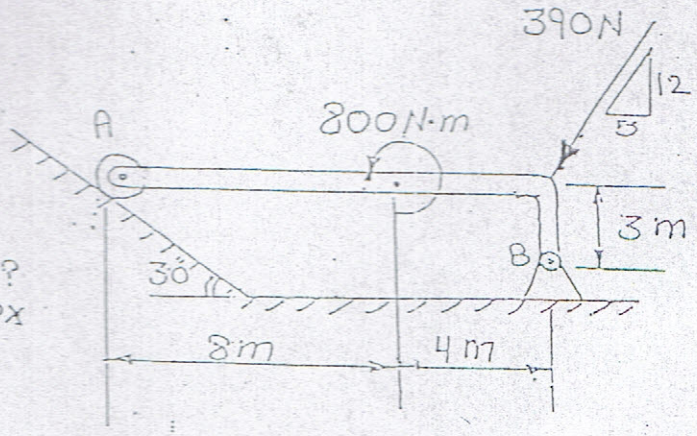
$\Rightarrow \boxed{A = 348N}$

EX ④ :- Determine the reactions at the roller A) and the pin (B).

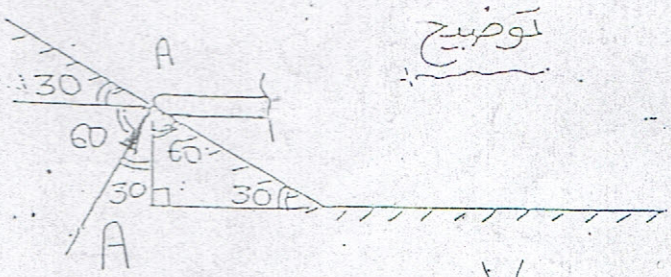
(F.B.D)



(رسم السؤال)



Solution :-



توضيح

$\sum M_B = 0$ (+ ↺)

$$-\overset{?}{A}\,Cos60 \times 3 - \overset{?}{A}\,Sin60 \times 12 + 390 \times \frac{5}{13} \times 3 + 800 = 0$$

(بدل)

$$\Rightarrow \boxed{A = 105.1\ N}$$

$\sum F_x = 0$

$$B_x + A\,Cos60 - 390 \times \frac{5}{13} = 0 \Rightarrow \overset{?}{B_x} + 105.1 \times Cos60 - 390 \times \frac{5}{13} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_x = 97.4\ N}$$

$\sum F_y = 0$

$$B_y + A\,Sin60 - 390 \times \frac{12}{13} = 0 \Rightarrow \overset{?}{B_y} + 105.1 \times Sin60 - 390 \times \frac{12}{13} = 0$$

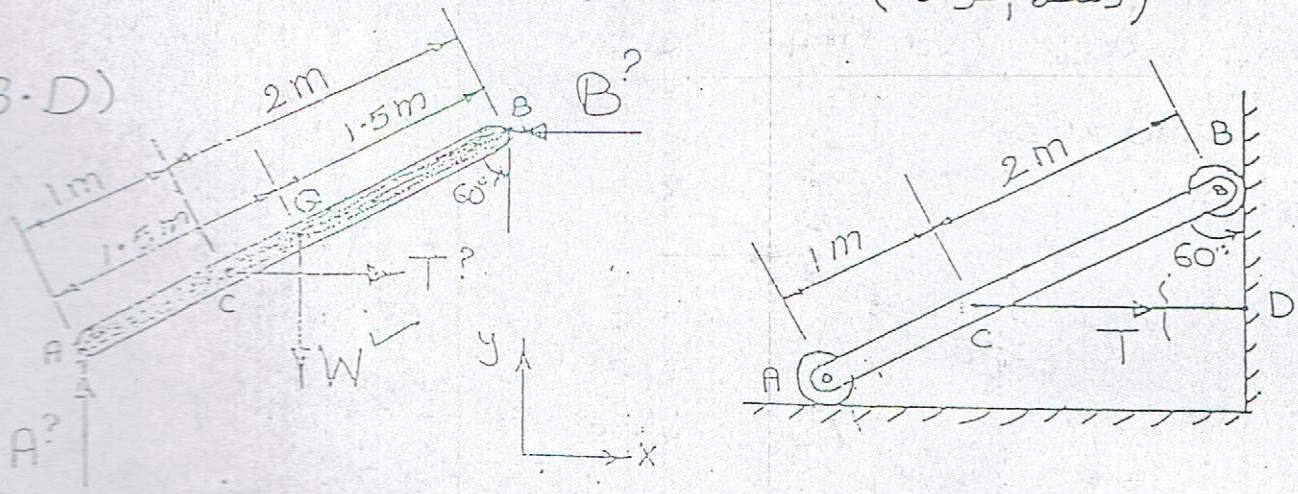
$$\Rightarrow \boxed{B_y = 268.9\ N}$$

(5)

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{97.4^2 + 268.9^2} \Rightarrow \boxed{B = 286\ N}$$

EX(5) ;- The uniform (50 kg) bar with end rollers is held in the equilbrium position by the horizontal cord as shown. Determine the tension (T) in the cord and obtain the forces at (A) and (B).

(رسم السؤال)



F.B.D)

Solution ;-

$W = m \times g = 50 \times 9.81 \Rightarrow \boxed{W = 490.5\ N}$

① $\sum F_y = 0$

$A - W = 0 \Rightarrow A - 490.5 = 0 \Rightarrow \boxed{A = 490.5\ N}$

$\sum M_B = 0$ ⟲+

$-A \times 3\sin 60 + W \times 1.5 \sin 60 + T \times 2\cos 60 = 0 \Rightarrow$

$490.5 \times 3\sin 60 + 490.5 \times 1.5 \sin 60 + T \times 2\cos 60 = 0$

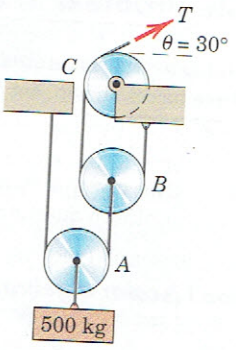
$\Rightarrow \boxed{T = 637.2\ N}$

③ $\sum F_x = 0$

$T - B = 0 \Rightarrow 637.2 - B = 0 \Rightarrow \boxed{B = 637.2\ N}$

Sample Problem 3/2

Calculate the tension T in the cable which supports the 500-kg mass with the pulley arrangement shown. Each pulley is free to rotate about its bearing, and the weights of all parts are small compared with the load. Find the magnitude of the total force on the bearing of pulley C.



Solution. The free-body diagram of each pulley is drawn in its relative position to the others. We begin with pulley A, which includes the only known force. With the unspecified pulley radius designated by r, the equilibrium of moments about its center O and the equilibrium of forces in the vertical direction require

① $[\Sigma M_O = 0] \qquad T_1 r - T_2 r = 0 \qquad T_1 = T_2$

$[\Sigma F_y = 0] \qquad T_1 + T_2 - 500(9.81) = 0 \qquad 2T_1 = 500(9.81) \qquad T_1 = T_2 = 2450 \text{ N}$

From the example of pulley A we may write the equilibrium of forces on pulley B by inspection as

$$T_3 = T_4 = T_2/2 = 1226 \text{ N}$$

For pulley C the angle $\theta = 30°$ in no way affects the moment of T about the center of the pulley, so that moment equilibrium requires

$$T = T_3 \qquad \text{or} \qquad T = 1226 \text{ N} \qquad \textit{Ans.}$$

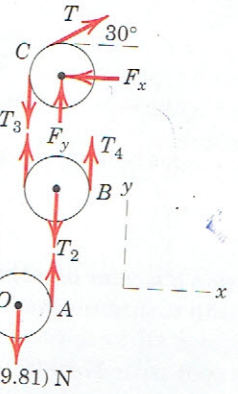
Equilibrium of the pulley in the x- and y-directions requires

$[\Sigma F_x = 0] \qquad 1226 \cos 30° - F_x = 0$

$[\Sigma F_y = 0] \qquad F_y + 1226 \sin 30° - 1226 = 0$

$[F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}] \qquad F = \sqrt{(1062)^2 + (613)^2} = 1226 \text{ N}$

$F_x = 1062 \text{ N}$, $F_y = 613 \text{ N}$ *Ans.*

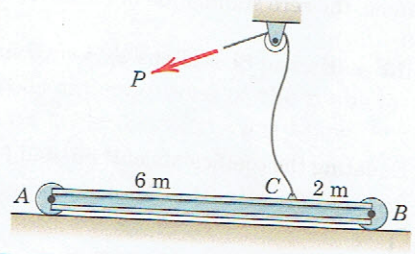


Helpful Hint

① Clearly the radius r does not influence the results. Once we have analyzed a simple pulley, the results should be perfectly clear by inspection.

Sample Problem 3/3

The uniform 100-kg I-beam is supported initially by its end rollers on the horizontal surface at A and B. By means of the cable at C it is desired to elevate end B to a position 3 m above end A. Determine the required tension P, the reaction at A, and the angle θ made by the beam with the horizontal in the elevated position.



Solution. In constructing the free-body diagram, we note that the reaction on the roller at A and the weight are vertical forces. Consequently, in the absence of other horizontal forces, P must also be vertical. From Sample Problem 3/2 we see immediately that the tension P in the cable equals the tension P applied to the beam at C.

Moment equilibrium about A eliminates force R and gives

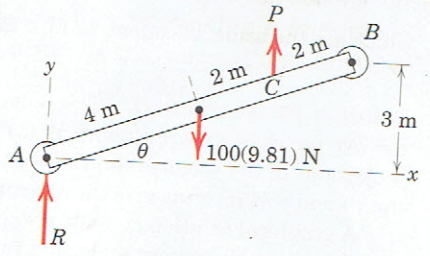
① $[\Sigma M_A = 0] \qquad P(6 \cos \theta) - 981(4 \cos \theta) = 0 \qquad P = 654 \text{ N} \qquad \textit{Ans.}$

Equilibrium of vertical forces requires

$[\Sigma F_y = 0] \qquad 654 + R - 981 = 0 \qquad R = 327 \text{ N} \qquad \textit{Ans.}$

The angle θ depends only on the specified geometry and is

$$\sin \theta = 3/8 \qquad \theta = 22.0° \qquad \textit{Ans.}$$



Helpful Hint

① Clearly the equilibrium of this parallel force system is independent of θ.