2^{nd} order defferential equations

يقصد بالدرجة الثانية (اي المشتقة الثانية هي $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

A) Non-linear D.E.

مفقود

*1- The dependent variable is missing (y)

*2. Th independent variable is missing (x)

*3- Homogeneous equations

B) linear D.E

1. The coefficient in equation are constant.

Ex. $1\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2 = \sin x$

ثوابت

2. The cofficient in equation are variable (se

Ex. $x\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + x = \cos x$

متغيرات

A) Non-linear D.E.

1) The dependent variable is missing.

$$f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, x\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = P \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

Ex1

$y'' + xy' = x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = x$

$y' = p \qquad y'' = \frac{dp}{dx}$

$\frac{dp}{dx} + xp = x \qquad (1^{st} \text{ order D.E})$

$\frac{dp}{dx} = x - xp = x(1-p)$

$\frac{dp}{1-p} = x\,dx$

$\ln x^n = n\ln x$

$-\ln(1-p) = \frac{x^2}{2} + c$

$\ln\frac{1}{1-p} = \frac{x^2}{2} + c$

$\frac{1}{1-p} = Exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$

omer khalifa

$1-p = \frac{1}{Exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right)}$

$p = 1 - \frac{1}{Exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right)}$

$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{Exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right)}$

$dy = \left(1 - \frac{1}{Exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right)}\right)dx$

$\boxed{e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c}}$

$\int dy = \int dx - \int \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}+c}}\,dx$

$y = x - c\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + c_2$

$\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = erf(x)$

2) Equations with independent variable missing

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = P \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dy} P$$

$$\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy} P$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P \frac{dP}{dy}$$ ملاحظة : كيفية اشتقاقه

Ex. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

omer khalifa

let $\frac{dy}{dx} = P \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = P \frac{dP}{dy}$

$P \frac{dP}{dy} + y = 0 \quad$ (1^{st} order)

$P\,dP = -y\,dy$

$$\frac{P^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1 \Rightarrow P^2 = -y^2 + C_1$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C_1 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 - y^2}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}}$$

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{y}{c}\right) + C_2$$

$$\boxed{x = \sin^{-1}\left(\frac{y}{c}\right) + C_2}$$ ANS.

3) Homogeneous equations

$$f\left(\frac{dy}{dx},\ x\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{y}{x}\right)=0 \quad \text{or } \frac{x}{y}$$

طريقة الحل:

علينا تبسيط المعادلة الى الشكل التالي

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=f_1\left(\frac{y}{x},\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{—— (1)}$$

نستخدم التعويض التالي

let $\frac{y}{x}=v \Rightarrow y=vx$ —— (2)

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ —— (3) (الاول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الاول)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dv}{dx}+x\frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{—— (4)}$$

omer khalifa

بعد تعويض (2) ، (3) ، (4) تأخذ المعادلة الشكل التالي

$$x^2\frac{d^2v}{dx^2}=f\left(v,\ x\frac{dv}{dx}\right)$$

الآن نحل التبسيط التالي

let $x=e^t \Rightarrow t=\ln x$

$$\boxed{\begin{aligned} x\frac{dv}{dx}&=\frac{dv}{dt}\\ x^2\frac{d^2v}{dx^2}&=\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{dv}{dt}\end{aligned}}$$

حفظ

تستخرج بطريقة السلسلة.

Ex- $2x^2y\frac{d^2y}{dx^2}+y^2=x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{y^2}{x}=\frac{1}{2}\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

let $y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dv}{dx}+x\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$2x^3 v\left(2\frac{dv}{dx} + x\frac{d^2v}{dx^2}\right) + v^2x^2 = x^2\left(v + x\frac{dv}{dx}\right)^2$$

$$4x^3 v\frac{dv}{dx} + 2x^4 v\frac{d^2v}{dx^2} + v^2x^2 = x^2\left(v^2 + 2vx\frac{dv}{dx} + x^2\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right.$$

$$4x^3 v\frac{dv}{dx} + 2x^4 v\frac{d^2v}{dx^2} + \cancel{v^2x^2} = \cancel{v^2x^2} + 2vx^3\frac{dv}{dx} + x^4\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

$$2vx^4\frac{d^2v}{dx^2} + 2vx^3\frac{dv}{dx} = x^4\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

$$2vx^2\frac{d^2v}{dx^2} + 2vx\frac{dv}{dx} = x^2\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \quad \text{——— (2)}$$

let $t = \ln x \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}$, $x^2\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{dv}{dt}$

نعوض في (2)

$$2v\left(\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{dv}{dt}\right) + 2v\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$2v\frac{d^2v}{dt^2} - 2v\frac{dv}{dt} + 2v\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$2v\frac{d^2v}{dt^2} = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 ,$$ وصلنا لـ معادلة درجة ثانية بتغير المستقل لا يظهر

let $P = \frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2v}{dt^2} = P\frac{dP}{dv}$

$$2vP\frac{dP}{dv} - P^2 = 0$$

omer khalifa

$$P\left[2v\frac{dP}{dv} - P\right] = 0$$

either $P = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = C_1 \Rightarrow y = C_1 x$ $\quad y_1$

or $2v\frac{dP}{dv} - P = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dv}{2v} \Rightarrow \ln P = \frac{1}{2}\ln v + \ln C_1$

$$P = C_1 v^{1/2}$$

B) linear D.E. with constant coefficients:

تكون على الصيغة التالية .

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = \phi(x)$$

فقط

يكون حل هذه المعادلات بخطوتين الخطوة الأولى تسمى
الحل المتمم (أي بفرض الطرف الأيمن من المعادلة) وهي
الخطوة الثانية هي إيجاد حل للطرف الأيمن وتسمى المعادلة
المساعدة أو الحل الخاص . الحل النهائي للمعادلة
ككل يساوي مجموع الحلين (العام والخاص)

<u>Exp.</u> $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

omer khalifa

$D^2 - 5D + 6 = 0$

$(D - 2)(D - 3)$

$D = 2 \;,\; D = 3$

لأن الجذور حقيقية مختلفة
وعليه فالحل يكون بالصيغة التالية

$$\boxed{y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}$$

<u>Exp.</u> $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

$D^2 + 6D + 9 = 0$

$(D + 3)(D + 3) = 0$

$D_1 = -3 \;,\; D_2 = -3$

لأن الجذور حقيقية متساوية
فالحل يكون

$$y_1 = e^{-3x}(c_1 x + c_2)$$

$$m = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ex.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

$$D^2 - 4D + 5 = 0$$

$i = \sqrt{-1}$

$$D = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 4\times 5}}{2} = 2 \mp \frac{\sqrt{-4}}{2} = 2 \mp \frac{\sqrt{4}}{2} i$$

$D = 2 \mp i$ لاحظ الجذور خيالية

$$y_1 = e^{2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$$

$$e^{px}(C_1 \sin qx + C_2 \cos qx)$$

Ex.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x^2$$

omer khalifa

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

الحل العام

$$D^2 + 2D + 1 = 0$$

$$(D+1)(D+1) = 0$$

$$y_1 = e^{-x}(C_1 x + C_2)$$

x الحل الخاص .

f(x)	P. I
α const.	A Constant
αe^{mx}	$A e^{mx}$
$\alpha \cos mx$	$A \cos mx + B \sin mx$
x^n	$A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + A_3 x^{n-2} + \dots + A_0$
$\alpha x^n e^{mx}(\sin \beta x)$	$e^{mx}(\sin \beta x + \cos \beta x)(A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + A_3 x^{n-2} + \dots)$
$\alpha x^n e^{mx}(\cos \beta x)$	//

$y = Ax^2 + Bx + C$

$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A$

$2A + 2(2Ax+B) + Ax^2 + Bx + C = x^2$

$2A + \underline{4Ax} + 2B + Ax^2 + \underline{Bx} + C = x^2$

$(4A+B)x + Ax^2 + 2A + 2B + C = x^2$

$\Rightarrow A = 1$ بالتشابه ينتج

$4A + B = 0 \Rightarrow 4 + B = 0 \Rightarrow B = -4$

$2A + 2B + C = 0$

$2 - 8 + C = 0 \Rightarrow C = 6$

omer khalifa

$y_2 = x^2 - 4x + 6$

$y = y_1 + y_2$ ∴ الحل العام

$y = e^{-x}(c_1 x + c_2) + x^2 - 4x + 6$

$\longleftrightarrow$

Ex. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 2x^2 + x$

$D^2 - D - 6 = 0$

$(D+2)(D-3) = 0$

$D_1 = -2, \quad D_2 = 3$

$y_1 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$

$y_2 = Ax^2 + Bx + C$

$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A$

الدالة الخاصة

$2A - 2Ax - B - 6(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + x$

$2A - 2Ax - B - 6Ax^2 - 6Bx - 6C = 2x^2 + x$

$-(2A + 6B)x - 6Ax^2 + 2A - B - 6C = 2x^2 + x$

$-6A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$

$-(2A + 6B) = 1$

$-2(-\frac{1}{3}) - 6B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{18}$

$2A - B - 6C = 0$

$2(-\frac{1}{3})$ $\Rightarrow C = -\frac{11}{108}$

Ex. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = \sin x$

$(D^2 - 4)y = 0$ الحالة المتجانسة

$m^2 - 4 = 0$

$m_1 = 2 \quad , \quad m_2 = -2$

$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$y_2 = A \sin x + B \cos x$ الحل الخاص ([illegible])

$y' = A \cos x - B \sin x$

$y'' = -A \sin x - B \cos x$

$-A \sin x - B \cos x - 4(A \sin x + B \cos x) = \sin x$

$-5A \sin x - 5B \cos x = \sin x$

$-5A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$ مساواة المعاملات

$-5B = 0 \Rightarrow B = 0$

$y_2 = -\frac{1}{5} \sin x$ omer khalifa

$y = y_1 + y_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{5} \sin x$ AN

Ex. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = e^{2x}$

$(D^2 - 4)y = 0$ الحالة المتجانسة

$m_1 = 2 \quad , \quad m_2 = -2$

$y_1 = \underline{c_1 e^{2x}} + c_2 e^{-2x}$

$y_2 = \underline{A e^{2x}}$ هذه الفرضية غير مقبولة [illegible] الحل الخاص:

والسبب في ذلك هو تكرار الحل مع احد الحلول في الحالة المتجانسة [illegible]

[illegible] وذلك نضرب الحل الخاص ب x [illegible]

$y_2 = A x e^{2x} + B$ [illegible] التشابه نضرب الحل مرة ثانية بـ x

$y = Axe^{2x} + B$

$y' = Axe^{2x}(2) + Ae^{2x}$

$y'' = 2Axe^{2x}(2) + e^{2x}(2A) + 2Ae^{2x}$

$\cancel{4Axe^{2x}} + \underbrace{2Ae^{2x} + 2Ae^{2x}} - \cancel{4Axe^{2x}} + 4B = e^{2x}$

$4Ae^{2x} - 4B = e^{2x}$

$\Rightarrow B = 0$ صبرنا دسوحي واضح بين الاهداب

$A = \frac{1}{4}$ يشهد عليها هم له القلب صلواتي

$y_2 = \frac{1}{4}e^{2x}x$

omer khalifa

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x} \cdot x$

Ex. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x^2$

omer khalifa

$(D^2 + 2D + 1)y = 0$

$m^2 + 2m + 1 = 0$

$(m+1)^2 = 0$

$m_1 = m_2 = -1$ الحل

$y_1 = e^{-x}(C_1x + C_2)$

الحل الخاص بطريقة مقلوب D

$(D^2 + 2D + 1)y = x^2$

$y = \frac{x^2}{D^2 + 2D + 1} = \frac{1}{(D+1)^2}x^2$ [illegible]

$= (D+1)^{-2}x^2 = \boxed{\left[1 + (-2)D + \frac{(-2)(-3)}{2!}D^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}D^3 + \cdots\right]}$

$= x^2 - 2(2x) + 3(2)$

$y_2 = x^2 - 4x + 6$

$y_1 = e^{-x}(C_1x + C_2) + x^2 - 4x + 6$

حفظ

$$\frac{1}{f(D)} e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \cdot \frac{1}{f(\alpha)}$$

مثال

$$\frac{1}{D^2+1} e^{3x} = e^{3x} \frac{1}{10} = 0.1 e^{3x}$$

مثال

$$\frac{1}{D^2} e^{5x} = e^{5x} \frac{1}{5^2} = \frac{e^{5x}}{25}$$

$$y = I_m \frac{1}{D^2-4} e^{ix} \rightarrow y = e^{ix} \frac{1}{i^2-4} = -\frac{1}{5} e^{ix}$$

$y_2 = -\frac{1}{5} \sin x$ نرجع التعويض بـ $I_m e^{ix}$ يأخذ $\sin x$

$$y = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-2x} - \frac{1}{5} \sin x$$

ANS.

Ex.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 6x e^{2x}$$

omer khalifa

$(D^2 - 4D + 4) y = 0$

$(m-2)^2 = 0$

$\therefore m_1 = m_2 = 2$

$y_1 = e^{2x}(c_1 x + c_2)$

لما يكون صعب يجب تحويل D

$$y_2 = \frac{1}{(D-2)^2} 6x e^{2x}$$

$$\boxed{\frac{1}{f(D)} y e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \frac{1}{f(D+\alpha)} y}$$

حفظ

شك

$$\frac{1}{D^2+2D+1}x^2e^{3x} = e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2+2(D+3)+1}x^2$$

$$= e^{3x}\frac{1}{D^2+6D+9+2D+6+1}x^2$$

$$= e^{3x}\frac{1}{D^2+8D+16}x^2$$

$$y_2 = \frac{1}{D^2-4D+4}6xe^{2x} = \frac{1}{(D-2)^2}6xe^{2x}$$

$$y_2 = 6e^{2x}\frac{1}{(D+2-2)^2}x = 6e^{2x}\frac{1}{D^2}x$$

معناه نكامل x مرتين

$$y_2 = \cancel{6}e^{2x}\frac{x^3}{\cancel{6}} = x^3e^{2x}$$

$$y_T = e^{2x}(C_1x+C_2)+x^3e^{2x}$$

Ex. $$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-6y = 2x^2+x$$

مثال سابق

$$y_1 = k_1e^{3x}+k_2e^{-2x}$$

الحل بطريقة الجدول (الحل السابق)

$$y_2 = -\frac{x^2}{3}-\frac{x}{18}-\frac{11}{108}$$

الحل بطريقة مقلوب D

$$y_2 = \frac{1}{(D-3)(D+2)}(2x^2+x)$$

24

ملاحظة لحل مثل هذه الصفحة اتباع أسلوب التجزئة.

يجب $\dfrac{1}{(D-3)(D+2)}$

$$\frac{A}{D-3}+\frac{B}{D+2}=\frac{1}{(D-3)(D+2)}$$

$$\frac{A(D+2)+B(D-3)}{(D-3)(D+2)}=\frac{1}{(D-3)(D+2)}$$

où $\underline{AD}+2A+\underline{\underline{BD}}-3B=1$

$$(A+B)D+\underline{2A-3B}=1$$

$$A+B=0 \qquad A=-B$$

omer khalifa

$$2A-3B=1$$

$$2A=1+3B=1-3A$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{5} \qquad B=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{\frac{1}{5}}{(D-3)}+\frac{-\frac{1}{5}}{(D+2)}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{(3-D)}+\frac{1}{(2+D)}\right)$$

$$y_2=-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{(3-D)}+\frac{1}{2+D}\right](2x^2+x)$$

$$=-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{D}{3}\right)^{-1}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{D}{2}\right)^{-1}\right](2x^2+x)$$

$$y_2=-\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}D+\frac{1}{27}D^2+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{D}{4}+\frac{D^2}{8}-\cdots\right)\right](2x^2+x)$$

$$=-\frac{1}{5}\left[\frac{5}{6}-\frac{5}{36}D+\frac{35}{216}D^2+\cdots\right](2x^2+x)$$

$$=\left[-\frac{1}{6}+\frac{1}{36}D-\frac{7}{216}D^2+\cdots\right]2x^2+x$$

$$y_2=-\frac{2}{6}x^2-\frac{x}{6}+\frac{1}{36}(4x+1)-\frac{7}{216}(4)$$

$$y_2=-\frac{x^2}{3}-\frac{x}{18}-\frac{11}{168}$$

الحل بطريقة ال D-operator

$$\boxed{\frac{1}{f(D)} e^{ax} = e^{ax}\frac{1}{f(a)}}$$

القاعدة الاولى
بشرط ان $f(a) \neq 0$

Ex. $(D^3-2D^2-5D+6)y = e^{4x}$

$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$ يتم ايجاد الجذور بطريقة التخمين

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)} e^{4x}$$

$$y_p = e^{4x}\frac{1}{(4-1)(4-3)(4+2)} = \frac{1}{18}e^{4x}$$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{18}e^{4x} \quad \text{ANS.}$$

Ex. $\left(\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6\right)y = (e^{2x}+3)^2$

$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$ يتم ايجاد الجذور بطريقة التخمين

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}(e^{2x}+3)^2$$

$$= \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}(e^{4x} + 6e^{2x} + 9)$$

$$= \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}e^{4x} + \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}6e^{2x} + \frac{9}{(D-1)(D-3)(D+2)}$$

$$y_p = \frac{1}{18}e^{4x} + \frac{6e^{2x}}{-4} + \frac{9}{6} = \frac{1}{18}e^{4x} - \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$$

$y = y_c + y_p.$