Matrices

Matrix is a rectangular arrangement of (mn) number where m is rows and n columns which enclosed by bracket.

Matrix take a symbol of Capital letters as A, B, C....

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{mn}$$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

- A matrix isn't just a collection of elements but every element has assigned a definite position in a particular row and column.

- special type of matrices

① square matrix :- a matrix where number of rows are equal to number of columns, for example.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

② Diagonal matrix: if each of its non-diagonal element is zero, for example.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

③ Identity Matrix: is a diagonal matrix whose diagonal elements are equal to 1, for example.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

④ symmetric matrix: A square matrix with $a_{ij}=a_{ji}$ for all i & j, for example.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 8 & -2 & 7 \\ -2 & -9 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

⑤ Zero matrix: A matrix whose all elements of Zero

$$O_{(3\times 2)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(6) Row vector :: A matrix consists a single row & it called (Row matrix), for example.

$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13})$, $B = (7. \quad 4 \quad -3)$

(7) Column vector :. A matrix consists of a single column & it called (Column matrix), for example

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

Matrix algebra.

1- Equality of two matrices :- Two matrices A & B are equal if they are the same order (same m and n) & their corresponding elements are equal

2- Scalar multiple of a matrix :-

If K is a scalar, then scalar product of matrix $A = (a_{ij})_{m \times n}$ given by (KA), hence.

ومعنى ذلك ان الثابت يضرب مع جميع عناصر المصفوفة

$$KA = \begin{Bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \\ ka_{m1} & ka_{m2} \cdots & ka_{mn} \end{Bmatrix}$$

③ Addition of two matrices :-

let A & B are two matrices with same order, then sum of them are given by

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

$$A+B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

ومعنى ذلك أنه يجمع كل عنصر مع مايقابله من الصفوف المتناظرة لذا هنا يشترط أن تكون الصفوفتين لها نفس الحجم (نفس عدد الصفوف والاعمدة)

④ Multiplication of two matrices

Two matrices A & B are comfirmable for product AB if number of columns in A equals to the number of rows in matrix B.

ومعنى ذلك انه لا يمكن ضرب صفوفتين إلا اذا كان عدد أعمدة الاولى يساوي عدد صفوف الثانية والعكس ليس صحيح

If $A=(a_{ij})_{m\times n}$ & $B=(b_{ij})_{n\times r}$, then AB is

$$AB=C=a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots\cdots + a_{in}b_{nj}$$

اي إننا نجمع حاصل ضرب عناصر كل صف من محدود الصفوف الثانية كما مر بك في الامثلة السابقة.

(5) properties of the matrices :.

If A, B & C are three matrices and C & K are Scalars then

ⓐ $A+(B+C)=(A+B)+C$ الخاصية التجميعية

ⓑ $C\cdot(A+B)=CA+CB$ الخاصية التوزيعية

ⓒ $C(KA)=(CK)A$ الخاصية التجميعية

ⓓ $(C\cdot A)B=C(AB)$ الخاصية التجميعية

ⓔ $A(BC)=(AB)C$ الخاصية التجميعية

ⓕ $A(B+C)=AB+AC$ الخاصية التوزيعية

Ex} let $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -5 & -1 & 1\end{bmatrix}$ & $B=\begin{bmatrix}2 & -5 & 6 & -1\\ 3 & 0 & -2 & -3\end{bmatrix}$

Find ① $3A$ ② $A+B$ ③ $A-B$ ④ $5A-2B$ ⑤ $0A$

Sol}

$$3A=\begin{bmatrix}1\times3 & 2\times3 & -3\times3 & 4\times3\\ 0\times3 & -5\times3 & -1\times3 & 1\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9 & 12\\ 0 & -15 & -3 & 3\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -5 & -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -5 & 6 & -1\\ 3 & 0 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

$$A+B=\begin{bmatrix} 1+2 & 2+-5 & -3+6 & 4+-1 \\ 0+3 & -5+0 & -1+-2 & 1+-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2\cdot -5 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1-2 & 2--5 & -3-6 & 4--1 \\ 0-3 & -5-0 & -1--2 & 1-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 7 & -9 & 5 \\ -3 & -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5A-2B=5\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 5 & 10 & -15 & 20 \\ 5 & -25 & -5 & 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & -10 & 12 & -2 \\ 6 & 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 5-4 & 10--10 & -15-12 & 20--2 \\ 5-6 & -25-0 & -5--4 & 5-6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 20 & -27 & 22 \\ -1 & -25 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$0A=0\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

Ex } If $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

Find AB.?

Sol }

$$AB = \begin{bmatrix} 2(1)+1(2)+3(3) & 2(4)+1(6)+3(8) \\ 4(1)+6(2)+5(3) & 4(4)+6(6)+5(8) \\ 7(1)+2(2)+3(3) & 7(4)+2(6)+3(8) \\ 1(1)+3(2)+2(3) & 1(4)+3(6)+2(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 38 \\ 31 & 92 \\ 20 & 64 \\ 13 & 38 \end{bmatrix}$$

- A is 4×3
- B is 3×2.
- AB is 4×2

لاحظ هنا

* في حالات تكون AB يمكن ايجاده لانه يحقق شرط ضرب المصفوفات بينما BA لا يمكن ايجاده لانه لا يحقق الشرط فمثلاً في المثال أعلاه لا يمكن ايجاد BA لأن عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف A .

* في بعض الحالات يمكن ايجاد كلاً من AB و BA ولكنهما مختلفين في الحجم. لاحظ الامثلة التالية

Ex } Find AB & BA for the following matrices

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 1(1)+3(3) & 1(-2)+3(5) \\ 2(1)+4(3) & 2(-2)+4(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1(1)+-2(2) & 1(3)+-2(4) \\ 3(1)+5(2) & 3(3)+5(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 13 & 29 \end{bmatrix}$$

Ex} Find AB & BA if $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2(1)+-1(0)+3(3)+0(-2) & 2(2)+-1(-1)+3(0)+0(1) \\ 4(1)+5(0)+-2(3)+1(-2) & 4(2)+5(-1)+-2(0)+1(1) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

$$BA = \begin{bmatrix} 1(2)+2(4) & 1(-1)+2(5) & 1(3)+2(-2) & 1(0)+2(1) \\ 0(2)+-1(4) & 0(-1)+-1(5) & 0(3)+-1(-2) & 0(0)+-1(1) \\ 3(2)+0(4) & 3(-1)+0(5) & 3(3)+0(-2) & 3(0)+0(1) \\ -2(2)+1(4) & -2(-1)+1(5) & -2(3)+1(-2) & -2(0)+1(1) \end{bmatrix}$$

$$\therefore BA = \begin{bmatrix} 10 & 9 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinant

If $A=(a_{ij})_{n\times n}$ be a square matrix of order n, then the number $|A|$ called determinant of the matrix A

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

① determinant of 2×2 matrix

let $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ then $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

② determinant of 3×3 matrix

let $B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ Then

$$|B| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

* Symbol of determinant $\det(A)$ or $|A|$

Ex} Find the determinant of the matrices.

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & -3 & 5\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

Sol} $\det(A) = (3\times3)-(-1\times4) = 9--4 = 9+4 = 13.$

$$\det(B) = 4\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix} - -3\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 5\end{vmatrix}$$

$$= 4\left[(0\times2)-(3\times5)\right]+3\left[(1\times2)-(3\times-1)\right]+5\left[(1\times5)-(0\times-1)\right]$$

$$= 4(0-15)+3(2+3)+5(5-0) = -60+15+25 \Rightarrow$$

$\det(B) = |B| = -20$

هنالك طريقة أخرى لإيجاد det لمصفوفة 3x3 وهي تقوم بتكرار أول عمودين في المصفوفة ثم نجمع ناتج ضرب الأقطار النازلة ونطرح منه مجموع ناتج ضرب الأقطار الصاعدة مثلاً

$$\begin{vmatrix}4 & -3 & 5\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 5 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}4 & -3\\ 1 & 0\\ -1 & 5\end{matrix}$$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

$$\det(B) = (4\times0\times2)+(-3\times3\times-1)+(5\times1\times5)-(5\times0\times-1)-$$
$$(4\times3\times5)-(-3\times1\times2) = 0+9+25-0-60+6$$
$$= -20$$