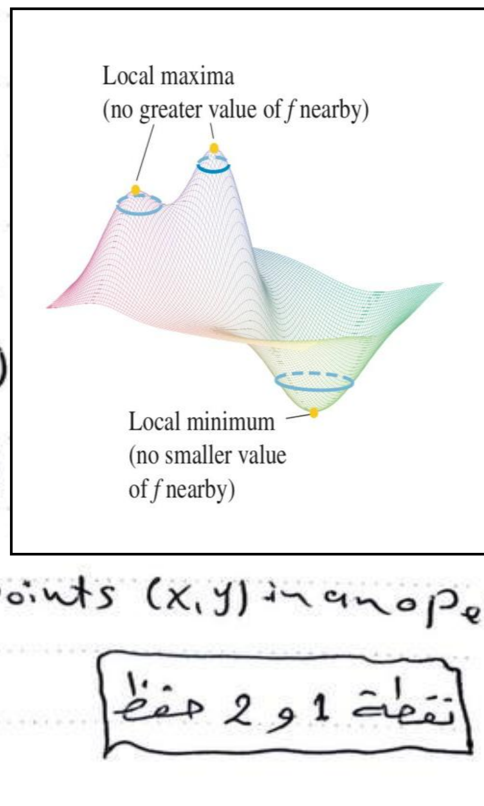
Extreme Values and Saddle points

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

A function of two variables can assume extreme values only at domain boundary points or at interior domain points where both first partial derivatives are zero or where one or both of the first partial derivatives fail to exist.

- For a function $f(x,y)$ of two variables, we look for points where the surface $z = f(x,y)$ has a horizontal tangent plane. At such points, we look for local maxima, local minima and saddle points.



1- $f(a,b)$ is a local maximum value of f if $f(a,b) \geq f(x,y)$ for all domain points (x,y) in an open disk centered at (a,b)

2- $f(a,b)$ is a local minimum value of f if $f(a,b) \leq f(x,y)$ for all domain points (x,y) in an open disk centered at (a,b)

نقطة 1 و 2 مهمة

- First Derivative Test for local Extreme values :- if $f(x,y)$ has a local maximum or minimum value at an interior point (a,b) of its domain and if the first partial derivatives exist there $f_x(a,b)=0$ and $f_y(a,b)=0$

- An interior point of the domain of a function $f(x,y)$ where both f_x and f_y are zero or where one or both of f_x and f_y don't exist is a Critical Point.

- A differentiable function $f(x,y)$ has a saddle point at a critical point (a,b) if in every open disk centered at (a,b) there are domain points (x,y) where $f(x,y) > f(a,b)$ and domain points (x,y) where $f(x,y) < f(a,b)$

Ex} Find the local extreme values of $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y + 9$

Sol} The domain of f is the entire plane and

$f_x = 2x$, $f_y = 2y - 4$ which exist everywhere.

sub f_x and f_y equals zero $\Rightarrow 0 = 2x \Rightarrow x = 0$

$0 = 2y - 4 \Rightarrow y = 2$ hence the local extrema can occur at the point $(0,2)$

the value of f at the point $(0,2)$ is $f(0,2) = 0^2 + 2^2 - 4(2) + 9$

$\therefore f(0,2) = 5$

الآن أصبح واضحاً لدينا ان النقطة $(0,2)$ هي نقطة حرجة critical point لذا المطلوب معرفة هل هي maximum or minimum وبكل بساطة نأخذ نقطة x على التعيين اي انها ليست النقطة الحرجة وتكون ضمن ال domain للدالة ولتكن $(1,3)$ ولنرى قيمة الدالة عند هذه النقطة

$f(x,y) = f(1,3) = 1^2 + 3^2 - 4(3) + 9 = 7$

المدرس المساعد عمر ابراهيم الجبوري

$\because f(a,b) < f(x,y) \Rightarrow$ the critical point $(0,2)$ gives local minimum

---

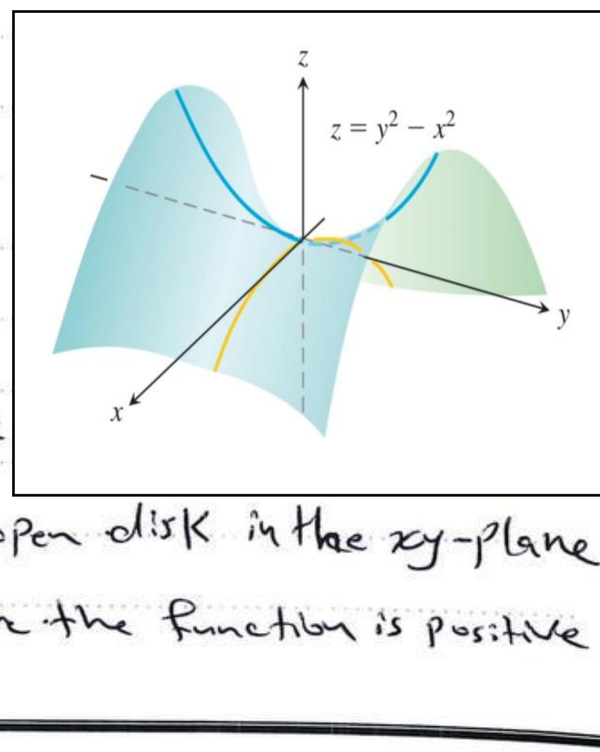
Ex} Find the local extreme values of $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Sol} the domain of f is the entire plane

$f_x = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$ & $f_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore$ the point $(0,0)$ is critical point

الآن يجب ان نتأكد هل هي نهاية عظمى أم صغرى



Along the positive x-axis f has the value $f(x,0) = -x^2 < 0$ & along the positive y-axis f has the value $f(0,y) = y^2 > 0$, Therefore every open disk in the xy-plane centered at $(0,0)$ contains points where the function is positive and points where it is negative.

$\therefore$ The function has a saddle point at the origin and no local extreme values

وللتخلص من هذا اللبس الذي يحصل مع بعض الدوال فإننا نستخدم اختبار المشتقة الجزئية الثانية

Second Derivative Test for local Extreme Values:-

if $f(x,y)$ and its first and second partial derivatives are continuous throughout a disk centered at (a,b) and that $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. Then

1- f has a local maximum at (a,b) if $f_{xx} < 0$ and $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ at (a,b)

2- f has a local minimum at (a,b) if $f_{xx} > 0$ and $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ at (a,b)

3- f has a saddle point at (a,b) if $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ at (a,b)

4- The test is inconclusive at (a,b) if $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ at (a,b)

* The expression $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ is called the discriminant or Hessian of f

* in Some times easier to remember this expression in determinant form

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

المدرس المساعد
عمر إبراهيم الجبوري

Ex} Find the local extreme values of the function

$f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$

Sol} The function is defined and differentiable for all x and y and its domain has no boundary points (entire plane).

$f_x = y - 2x - 2 = 0$ & $f_y = x - 2y - 2 = 0$.

معادلتين ٢ شيئين مع متغيرين x, y

$$\left.\begin{array}{l} y - 2x - 2 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{array}\right\} \text{نضرب المعادلة الثانية} \times 2$$

$$\left.\begin{array}{l} y - 2x - 2 = 0 \\ 2x - 4y - 4 = 0 \end{array}\right\} \underset{\text{بالجمع}}{\Longrightarrow} -3y - 6 = 0 \Rightarrow -3y = 6 \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

نعوض فيه y في المعادلة الاولى او الثانية

$y - 2x - 2 = 0 \Rightarrow -2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow -2x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

The point $(-2,-2)$ is critical point

$f_{xx} = -2$, $f_{yy} = -2$ $f_{xy} = 1$

$\therefore$ The discriminant of f at $(a,b) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 3$

$\because f_{xx} < 0$ & $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

$\therefore f$ has a local maximum at $(-2,-2)$ and the value of f at this point is $f(-2,-2) = (-2)(-2) - (-2)^2 - (-2)^2 - 2(-2) - 2(-2) + 4$

$= 8$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

Ex} Find the local extreme values of $f(x,y)=3y^2-2y^3-3x^2+6xy$

Sol} The domain of f is the entire plane (no boundary points)

$f_x = 6y-6x=0$ & $f_y = 6y-6y^2+6x=0$.

$\therefore 6y=6x \Rightarrow \boxed{y=x}$ sub into $f_y \Rightarrow 0=6y-6y^2+6y$

$\therefore -6y^2+12y=0 \Rightarrow 6y(-y+2)=0$ either $6y=0 \Rightarrow x=0$.

or $-y+2=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=2$

$\therefore$ There are two critical points $(0,0)$ & $(2,2)$

$f_{xx}=-6 \qquad f_{yy}=6-12y$ & $f_{xy}=6$

$\therefore f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-6(6-12y)-36=72(y-1)$

for $(a,b)=(0,0) \Rightarrow$ The discriminant $=-72$

$\therefore$ The point $(0,0)$ is a saddle point

for $(a,b)=(2,2) \Rightarrow$ The discriminant $=72$ & $f_{xx}=-6<0$

$\therefore$ The point $(2,2)$ is a local maximum value and

$f(2,2)=3(2)^2-2(2)^3-3(2)^2+6(2)(2)=\cancel{12}-16-\cancel{12}+24=8$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

Ex Find the local extreme values of $f(x,y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}$

Sol The function is defined at every points except $(0,0)$.
which make the function undefined.

$f_x = \frac{-1}{x^2} + y = 0$ & $f_y = x - \frac{1}{y^2} = 0$

$\frac{-1}{x^2} = -y \Rightarrow \frac{1}{x^2} = y \Rightarrow$　　sub into $x - \frac{1}{y^2} = 0$

$x - \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = 0 \Rightarrow x - x^4 = 0 \Rightarrow x(1 - x^3) = 0$

either $x = 0$　يهمل لأنه يجعل الدالة غير معرفة

or $1 - x^3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \Rightarrow y = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1^2} \Rightarrow \boxed{y = 1}$

$\therefore$ The point $(1,1)$ is critical point　　المدرس المساعد عمر ابراهيم الجبوري

$f_{xx} = \frac{2}{x^3}$, $f_{yy} = \frac{2}{y^3}$ & $f_{xy} = 1$

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{2}{x^3} \cdot \frac{2}{y^3} - (1)^2 = \frac{4}{x^3 y^3} - 1 = \frac{4}{(1)^3 (1)^3} - 1 = 3 > 0$

$f_{xx} = 2 > 0$ $\therefore$ The point $(1,1)$ is local minimum and

the value of f at $(1,1)$ is $\left(\frac{1}{1} + (1)(1) + \frac{1}{1}\right) = 3$

Partial Derivatives with Constrained Variables

- In finiding partial derivatives of function like $w = f(x, y)$ we have assumed x and y to be independent variable
- In many applications, this is not the case. For example, the internal energy U of a gas may be expressed as a function $U = f(P, V, T)$, however P, V & T are constrained by the ideal gas law and fail to be independent.

عندما تكون الدالة الاصلية محددة بعلاقة رياضية اخرى بين متغيراتها المستقلة فهنا لابد من تحديد المتغيرات المعتمدة والمستقلة بشكل دقيق كما سنرى في الامثلة التالية

Ex} Find $\frac{\partial w}{\partial x}$ if $w = x^2 + y^2 + z^2$ and $z = x^2 + y^2$

Sol} نلاحظ هنا ان احد المتغيرات المستقلة وهو z قد ظهر في العلاقة الرياضية الثانية المحددة وقد تم التعبير عنه كدالة للمتغيرين المستقلين x, y وليس لمتغيرات جديدة لذا هنا المسألة هي (constrained) وليس قاعدة التسلسل.

الخطوة الاولى في الحل هي تحديد اي المتغيرات مستقلة واي منها معتمدة لذا هناك احتمالين

Dependent	independent
w, z	x, y
w, y	x, z

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

• لاحظ لا يمكن تعريف المتغير x على انه متغير معتمد لانه لا يصح اشتقاق متغير معتمد نسبة الى متغير معتمد آخر.

الحل الاول المتاح أمامنا هو تعويض معادلة z في معادلة w ثم اشتقاقها

$$w = x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+(x^2+y^2)^2$$

$$w = x^2+y^2+x^4+2x^2y^2+y^4$$

$$\therefore \frac{dw}{dx} = 2x+4x^3+4y^2x$$

هذه المشتقة الاولى $\frac{dw}{dx}$ باعتبار ان x, y هي متغيرات مستقلة

الحل الثاني باعتبار z, x هما المتغيرات المستقلة لذا هنا يجب التخلص من المتغير y من خلال المعادلة:-

$$z = x^2+y^2 \Rightarrow y^2 = z-x^2$$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

$$w = x^2+y^2+z^2 = x^2+z-x^2+z^2 = z+z^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{dw}{dx} = 0}$$

هذه المشتقة الاولى $\frac{dw}{dx}$ باعتبار ان x, z هي المتغيرات المستقلة

* ان اختيار اي من الحلين اعلاه كحل صحيح لـ $\frac{dw}{dx}$ يعتمد بشكل اساسي على فهم المعادلات والمتغيرات فيزيائياً وهندسياً.

---

* في بعض المسائل لا يمكن التخلص من المتغيرات المراد تعويض معادلته بالدالة الاصلية لذا يجب الاشتقاق للمعادلة ضمنياً كما تعلمنا مسبقاً والمثال التالي يوضح ذلك.

Ex} Find $\frac{dw}{dx}$ at the point $(2,-1,1)$ if

$w = x^2+y^2+z^2$, $z^3 - xy + yz + y^3 = 1$ and x and y are the independent variables.

Sol) لاحظ هنا تم تحديد المتغيرات المستقلة في منطوق السؤال لذا نلتزم بذلك في الحل.

w, z متغيرات معتمدة

$$\frac{dw}{dx} = 2x + 2z\frac{dz}{dx}$$

لاحظ هنا كتبنا $\frac{dz}{dx}$ لان z هو متغير معتمد وليس مستقل ولا يمكن اعتباره ثابت

الان نشتق المعادلة المحددة ضمنياً

$$3z^2\frac{dz}{dx} - y + y\frac{dz}{dx} + 0 = 0$$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

$$\therefore \frac{dz}{dx}(3z^2 + y) = y \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{y}{3z^2 + y}$$

$$\therefore \frac{dw}{dx} = 2x + 2z * \frac{y}{3z^2 + y} \quad \text{at point } (2, -1, 1).$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right)_{(2,-1,1)} = 2(2) + \frac{2(1)(-1)}{3(1)^2 + (-1)} = 4 + \frac{-2}{2} = 3$$

* نستخدم الرموز التالية لبيان اي المتغيرات تكون مستقلة

$\left(\frac{dw}{dx}\right)_y \Rightarrow x, y$ independent , $\left(\frac{df}{dy}\right)_{x,t}$, y, x, t independent

Ex} Find $\left(\frac{dw}{dx}\right)_{y,z}$ if $w = x^2 + y - z + \sin t$ and $x + y = t$

sol} x, y, z independent

من منطوق السؤال عرفنا ان المتغيرات x, y, z هي متغيرات مستقلة بقي لدينا المتغير t لذا أبسط حل هو تعويض معادلة t (المحددة) بالدالة الاصلية لـ w

$$\therefore w = x^2 + y - z + \sin(x + y)$$

$$\therefore \left(\frac{dw}{dx}\right)_{y,z} = 2x + 0 - 0 + \cos(x + y) = 2x + \cos(x + y)$$