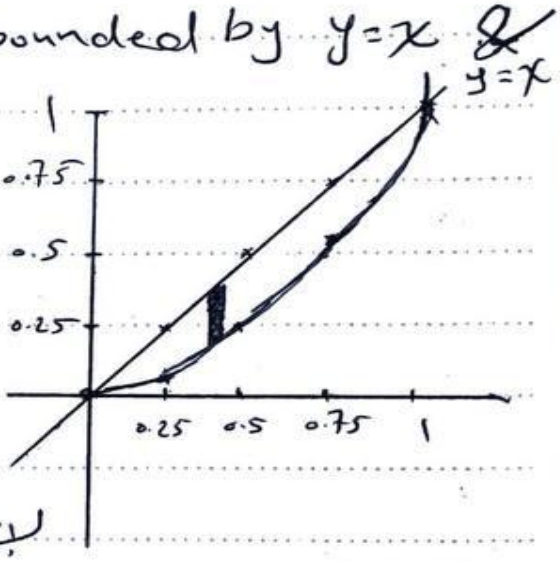
Area by Double Integration

-If we define $f(x,y)=1$ in the definition of the double integral over a region R, the area of a closed, bounded plane region R is

$$A=\iint_R dA=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\,dy=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\,dx$$

Ex] Find the area of the region R bounded by $y=x$ & $y=x^2$ in the first quadrant?

Sol] sketch the region



$y=x$	
x	y
0	0
1	1
2	2

$y=x^2$	
x	y
0	0
0.25	0.0625
0.5	0.25
0.75	0.562
1	1

لإيجاد نقاط التقاطع نساوي المعادلتين

$x=x^2 \Rightarrow x-x^2=0 \Rightarrow x(1-x)=0$ either $\boxed{x=0}$ or $1-x=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$$A=\int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx=\int_0^1 [y]_{x^2}^{x}\,dx=\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-(0)=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}\ \text{unit}^2$$

ايضاً يمكن حل بالة بطريقة أخرى

$$A=\int_0^1\int_{y}^{\sqrt{y}} dx\,dy=\int_0^1 [x]_{y}^{\sqrt{y}}\,dy=\int_0^1 (\sqrt{y}-y)\,dy$$

$$=\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}-\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

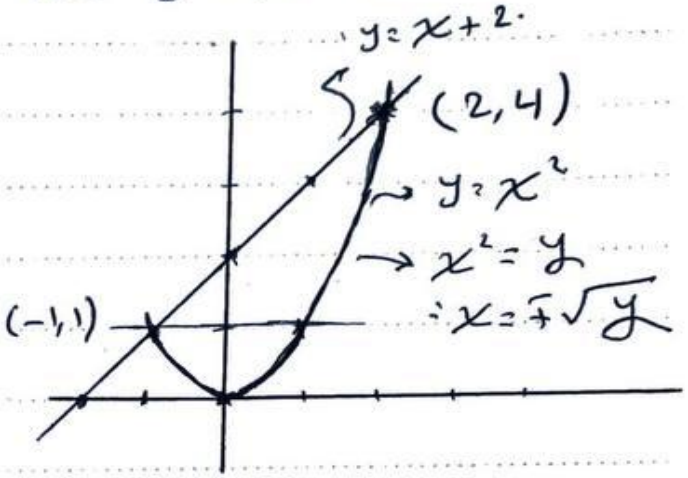
التدريس الساعد عمر ابراهيم الجبوري

Ex} Find the area of the region R enclosed by the parabola $y=x^2$ and the line $y=x+2$

Sol} sketch the region R

$y=x+2$	
x	y
0	2
1	3
2	4

$y=x^2$	
x	y
0	0
1	1
2	4
-1	1



نستخرج نقاط التقاطع من الرسم أو من خلال حساب المعادلتين

$$x^2=x+2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0$$

either $x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$ or $x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$$A=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx = \int_{-1}^{2}[y]_{x^2}^{x+2}dx = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{4}{2}+2(2)-\frac{2^3}{3}-\left(\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$$= 2+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3} = \frac{-16-3-2}{6}+8 = \frac{-21}{6}+8 = \frac{-21+48}{6}$$

$$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \text{ unit}^2$$

أيضاً يمكن حل المسألة بطريقة أخرى (تأخذ شريحة أفقية)

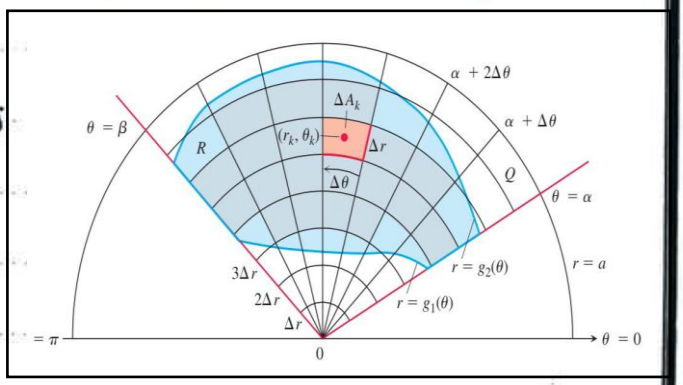
هنا يجب أن نلاحظ أن المساحة يجب أن تقسم إلى قسمين

$$A=\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_{1}^{4}\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy$$

$y=x+2$
$\therefore x=y-2$
$y=x^2 \Rightarrow x=\mp\sqrt{y}$

Double Integral in polar Form

Suppose that a function $f(r,\theta)$ is defined over a region R. that is bounded by the rays $\theta=\alpha$ & $\theta=\beta$ and by the continuous Curves: $r=g_1(\theta)$ & $r=g_2(\theta)$

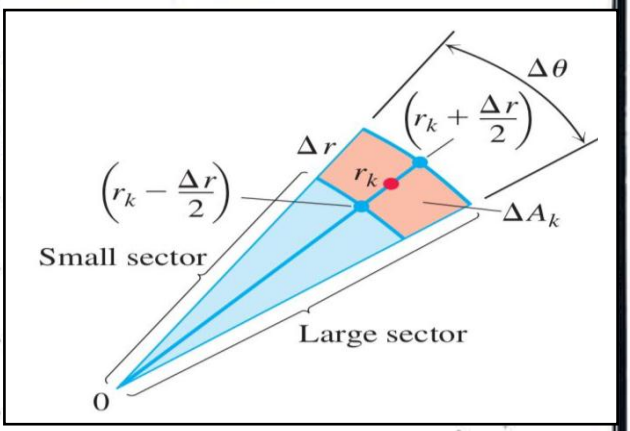


- The area of a wedge-shaped sector of a circle $A=\frac{1}{2}\theta r^2$.
- The area of the circular sector are:

Inner radius: $\frac{1}{2}\left(r_k-\frac{\Delta r}{2}\right)^2\Delta\theta$

outer radius: $\frac{1}{2}\left(r_k+\frac{\Delta r}{2}\right)^2\Delta\theta$

$\therefore \Delta A_k$ = area of large sector − Area of Small Sector



$$=\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\left[\left(r_k+\frac{\Delta r}{2}\right)^2-\left(r_k-\frac{\Delta r}{2}\right)^2\right]$$

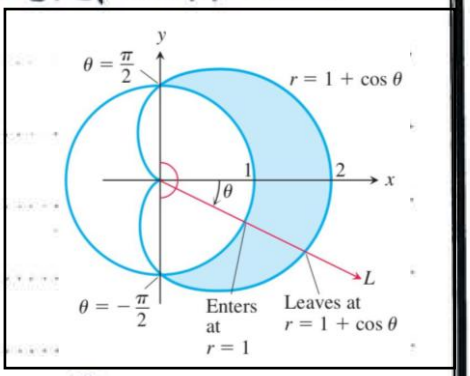
$$=\frac{\Delta\theta}{2}\cdot(2r_k\Delta r)=r_k\cdot\Delta r\,\Delta\theta$$

according to Fubini's Theorem

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA=\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

ضع

Ex] Find the limit of integration for $f(r,\theta)$ over the region R that is lies inside the cardioid $r=1+\cos\theta$ and out side the circle $r=1$



$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{1}^{1+\cos\theta} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

- The same previous procedure used to find the area of R, hence if $f(r,\theta)$ is constant with value 1

$$\therefore A=\iint_R r\, dr\, d\theta$$ Ans

Ex] Find the area enclosed by the lemniscate $r^2=4\cos 2\theta$

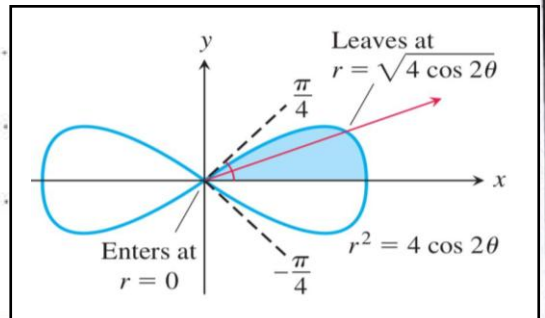
$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta =$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos 2\theta-0)\,d\theta = 4\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4}$$

$$A=4\sin 2\times\frac{\pi}{4}-4\sin 2(0)$$

$$=4 \text{ unit}^2$$



* أيضاً يمكن التحويل من الإحداثيات الكارتزية الى الإحداثيات القطبية وبالعكس حاضرات

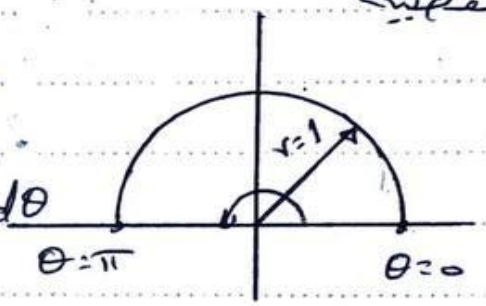
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Ex} Evaluate $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dy\,dx$ where R is the

Semi circular region bounded by the x-axis and the Curve $y=\sqrt{1-x^2}$

Sol} لاحظ هنا لايمكن ان تكامل بالطرق الاعتيادية كون مشتقة الاس بالنسبة لـ y او x غير متوفرة ولا يمكن توفيرها لذا من السهل تحويل التكامل الى الإحداثيات القطبية

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{r^2}\,r\,dr\,d\theta =$$



$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e^1-e^0)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e-1)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[e\theta-\theta\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left[(\pi e-\pi)-(0)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot(e-1)$$

هذا التكامل خاص بنصف الدائرة العلوي لانه اولاً هو ذكر ذلك في السؤال وحتى لو لم يذكر يمكننا معرفة ذلك من خلال انه الحدود بين x-axis ومعادلة نصف الدائرة العلوي

معادلة دائرة $x^2+y^2=1$

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ (unit)

عند تحويلها الى polar

$\therefore x^2+y^2=1$

but $x^2+y^2=r^2$

$\therefore r^2=1$

$\therefore r=\pm 1$

$\boxed{r=+1}$

التدريس الساعة
عمر ابراهيم الجبوري

Ex} Evaluate the integral $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\, dy\, dx$ by replacing Cartesian Coordinates into Polar.

هذا التكامل خاص بربع دائرة

Sol} We have that $x^2+y^2=r^2$

لأنه حدود x من 0 إلى 1
لذا سنأخذ θ من صفر إلى $\frac{\pi}{2}$

Limit of integration $y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2=1-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$

about $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow \boxed{r=1}$

هذا التكامل يمكن إجراء التكامل الأول منه بسهولة ولكن التكامل الثاني لا يمكن إجراءه بالطرق الاعتيادية حاول ذلك!

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \times r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}-0\right) d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{4}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}(0) = \frac{\pi}{8}$$

الشرح السائد عبر ابراهيم الجبوري

لاحظ هنا عند تغيير التكامل من Cartesian الى Polar اصبحت حدود التكامل ثوابت!!

Ex} Find the volume of the solid region bounded above by the paraboloid $z=9-x^2-y^2$ and below by the unit circle in the xy plane

Sol} أولاً يجب تحويل الدالة $f(x,y)=z$ الى Polar ومن ثم تحويل حدود التكامل من x,y الى r,θ

$$9-x^2-y^2 = 9-(x^2+y^2) = 9-r^2$$

هو ذكرني السؤال أن حدود التكامل هي دائرة الوحدة والتي هي

$$x^2+y^2=1 \Longrightarrow r^2=1 \Longrightarrow r=1$$

وعليه أن حدود r تكون من صفر الى 1

وحدود θ تكون من صفر الى 2π لأن الحدود كل الدائرة وليس نصفها أو ربعها

$$= \int_R \int (9-x^2-y^2)\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (9-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (9r-r^3)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{9r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{4}\right)d\theta = \left[\frac{9}{2}\theta-\frac{1}{4}\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{9}{2}(2\pi)-\frac{1}{4}(2\pi)-(0) =$$

$$= 9\pi-\frac{1}{2}\pi = \frac{(18-1)\pi}{2} = \frac{17\pi}{2}$$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

Triple Integrals.

If $f(x,y,z)$ is function defined on a closed, bounded region D in space, then the volume is

$$V = \iiint_D dV = \iiint_D dz\,dy\,dx$$

المدرس المساعد
عمر ابراهيم الجبوري

Ex} Find the integral $V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^{1} dy\,dz\,dx$

Sol} $$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^{1} dy\,dz\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} [y]_{x+z}^{1}\,dz\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-(x+z)\,dz\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[z - xz - \frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 (1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} - (0)\,dx$$

$$= \int_0^1 \left((1-x)(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2\right) dx$$ قوس مرفوع لأس يجب توضيح

$$= \int_0^1 \left((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\,dx$$ مشتقة داخل القوس

$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{1-x)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-1)^3}{3} - \frac{(1-0)^3}{3}\right]$$ مشتقة داخل القوس -1 وضربنا وقسمنا -1 على

$$= \frac{-1}{2} * \frac{-1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ex} Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{1}\int_{-2}^{3} y\sin z\, dx\, dy\, dz$.

Sol}

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{1} y\sin z\,[x]_{-2}^{3}\, dy\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{1} y\sin z\,(3--2)\, dy\, dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{1} 5\, y\sin z\, dy\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 5\sin z\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1} dz.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} .5\sin z\left[\frac{1}{2}-0\right] dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{5}{2}\sin z\, dz$$

$$= \frac{5}{2}\left[-\cos z\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{5}{2}\left[-\cos\frac{\pi}{6}-(-\cos 0)\right]$$

$$= \frac{5}{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right] = \frac{-5\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{2} = \frac{-5\sqrt{3}+10}{4}$$

Ex} Evaluate $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos(u+v+w)\, du\, dv\, dw$

Sol} $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin(u+v+w)\Big]_0^{\pi} dv\, dw$ على اختيار متغير الزاوية موجبة

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(\pi+v+w)-\sin(0+v+w)\right) dv\, dw.$$

$$= \int_0^{\pi}\left[-\cos(\pi+v+w)+\cos(v+w)\right]_0^{\pi} dw$$

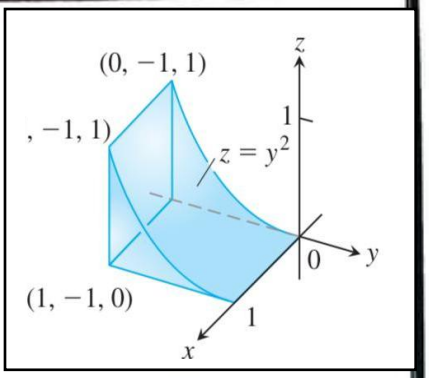
$$= \int_0^{\pi} -\cos(\pi+\pi+w)-\cos(\pi+0+w)+\cos(\pi+w)-\cos(0+w)\, dw$$

$$= \left[-\sin(2\pi+w)+\sin(\pi+w)+\sin(\pi+w)-\sin w\right]_0^{\pi}$$

$$= -\sin 3\pi+\sin 2\pi+\sin 2\pi-\sin\pi-(-\sin 2\pi+\sin 2\pi+\sin\pi-\sin 0) = 0$$

$$= -\sin 3\pi+2\sin 2\pi-2\sin\pi-\sin 0 = 0+0-0+0 = 0.$$

Ex} Find Volumes of the regions for



① $$V = \int_0^1 \int_{-1}^{0} \int_0^{y^2} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{-1}^{0} [z]_0^{y^2} dy\, dx = \int_0^1 \int_{-1}^{0} y^2\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{0} dx = \int_0^1 \frac{+1}{3}\, dx = \left[\frac{+1}{3}x\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

تم تحديد حدود التكامل من خلال الرسم

② The region between the cylinder $z = y^2$ & the xy plane that is bounded by the planes $x=0$, $x=1$, $y=-1$ & $y=1$

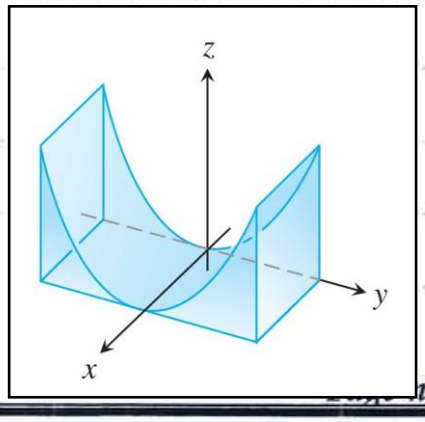
S.I}

$$V = \int_0^1 \int_{-1}^{1} \int_0^{y^2} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{-1}^{1} [z]_0^{y^2} dy\, dx = \int$$

$$= \int_0^1 \int_{-1}^{1} (y^2 - 0)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - -\frac{1}{3}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3}\, dx = \left[\frac{2}{3}x\right]_0^1 = \frac{2}{3} \text{ units}^3$$



الدرس الساعة
عمر ابراهيم الجبوري